
فصل ۲
مثلثات

مقدمه: یادآوری مفاهیم اولیهٔ مثلثات

تعریف درجه: اندازهٔ یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد، ۳۶۰ درجه است. پس اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هر قسمت، یک درجه است.

تعریف رادیان: اندازهٔ یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد، 2π رادیان است. پس در هر دایرهٔ دلخواه، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی که طول کمان روبه‌رو به آن با طول شعاع برابر باشد، یک رادیان است.

تذکر اگر α بر حسب درجه باشد، آن را با α° و اگر α بر حسب رادیان باشد، آن را به صورت α نمایش می‌دهند.

تبدیل درجه به رادیان و برعکس: اگر θ یک زاویه در دایرهٔ مثلثاتی باشد که اندازهٔ آن بر حسب درجه، برابر D و اندازهٔ آن بر حسب رادیان، برابر R باشد، آن‌گاه داریم:

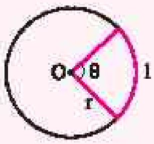
$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

مثال اندازهٔ زاویه‌های $\alpha=\frac{\pi}{۱۵}$ و $\beta=۱$ بر حسب رادیان می‌باشد، آن‌ها را به درجه تبدیل کنید.

پاسخ با استفاده از رابطهٔ $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$، داریم:

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{\frac{\pi}{۱۵}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰}{۱۵}=۱۲\Rightarrow \alpha=۱۲^\circ\ ;\ \frac{D}{۱۸۰}=\frac{۱}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۱۸۰}{\pi}=\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}=۵۷^\circ\Rightarrow \beta\simeq ۵۷^\circ$$

نتیجه اندازهٔ ۱ رادیان، تقریباً برابر با ۵۷° است.

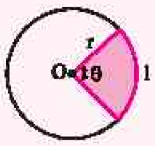


طول کمان: در یک دایره به شعاع r اگر اندازهٔ زاویهٔ مرکزی بر حسب **رادیان** برابر θ باشد، طول کمان روبه‌روی آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$l=r\theta$$

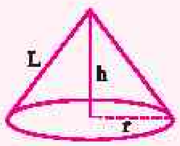
بنابراین اگر $r=۱$ باشد، اندازهٔ l با اندازهٔ θ برحسب رادیان برابر است.

تعریف قطاع: به قسمتی از دایره که بین دو شعاع قرار دارد، قطاع گفته می‌شود.



نکته مساحت قطاعی از یک دایره به شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ رادیان، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

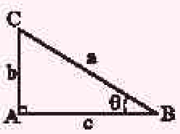
$$S=\frac{r^۲}{۲}\theta$$



نکته مساحت جانبی مخروط به شعاع r و ارتفاع h و مولد L برابر است با:

$$\text{مساحت جانبی مخروط}:\ A=\pi rL=\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مانند شکل روبه‌رو، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ حادهٔ θ، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱) $\sin\theta=\frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ وتر}}=\frac{b}{a}$

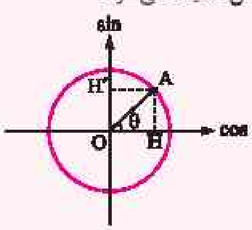
۲) $\cos\theta=\frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ وتر}}=\frac{c}{a}$

۳) $\tan\theta=\frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}=\frac{b}{c}$

۴) $\cot\theta=\frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}=\frac{c}{b}$

دایرهٔ مثلثاتی: اگر در صفحهٔ مختصات، به مرکز مبدأ مختصات، دایره‌ای به شعاع ۱ واحد بزنیم، آن را یک دایرهٔ مثلثاتی گویند. هر شعاع این دایره با جهت مثبت محور xها زاویه‌ای مانند θ می‌سازد که مختصات محل برخورد این شعاع با دایره، $(\cos\theta ، \sin\theta)$ می‌باشد.

در دایرهٔ مثلثاتی، محوری که بر محور xها منطبق است، **محور کسینوس** و محوری که بر محور yها منطبق است، **محور سینوس** نامیده می‌شود.

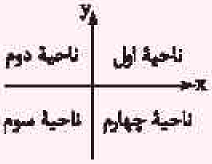


اگر θ اندازهٔ یک کمان باشد، در این صورت اندازهٔ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس، برابر با اندازهٔ جبری پاره‌خط‌های زیر است:

$$\sin\theta=OH' \quad ,\quad \cos\theta=OH$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مهم:

θ برحسب رادیان	$۰(۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۶}(۳۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۴}(۴۵^\circ)$	$\frac{\pi}{۳}(۶۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۲}(۹۰^\circ)$	$\pi(۱۸۰^\circ)$	$\frac{۳\pi}{۲}(۲۷۰^\circ)$	$۲\pi(۳۶۰^\circ)$
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot\theta$	ت.ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت.ن	۰	ت.ن



در جدول بالا، علامت «ت.ن» به معنی آن است که نسبت مثلثاتی در آن زاویه تعریف نمی‌شود.

علامت نسبت‌های مثلثاتی: در ناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی، همهٔ نسبت‌های مثلثاتی مثبت‌اند. در ناحیهٔ دوم فقط علامت سینوس مثبت است. در ناحیهٔ سوم فقط تانژانت و کتانژانت مثبت هستند و در ناحیهٔ چهارم فقط علامت کسینوس مثبت است.

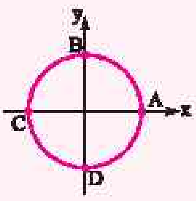
نسبت‌های مثلثاتی قرینهٔ کمان: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی $(-\theta)$ به صورت زیر می‌باشد:

۱ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ۲ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ۳ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ۴ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۲}\pm\theta$: برای محاسبهٔ این نسبت‌ها، ابتدا مشخص می‌کنیم که انتهای کمان در کدام ناحیه است (فرض می‌کنیم θ زاویهٔ حاده است.) و علامت آن را مشخص می‌کنیم. حال اگر k زوج باشد، همان نسبت مثلثاتی را با کمان θ می‌نویسیم (عبارت $\pm\frac{k\pi}{۲}$ را حذف می‌کنیم.)، اما اگر k فرد باشد، نسبت‌های مثلثاتی به صورت زیر تغییر می‌کنند:

۱ $\sin\rightarrow\cos$ ۲ $\cos\rightarrow\sin$ ۳ $\tan\rightarrow\cot$ ۴ $\cot\rightarrow\tan$

تذکر برای تعیین ناحیهٔ کمان‌های بزرگ، با توجه به اینکه مضارب زوج π، روی نقطهٔ A و مضارب فرد π، روی نقطهٔ C هستند، محدوده را تعیین می‌کنیم. برای مثال، کمان $(\frac{۱۰۵\pi}{۲}+\alpha)$ چون $\frac{۱۰۵\pi}{۲}=۵۲/۵\pi$ است، پس کمان در ناحیهٔ دوم می‌باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



(۱۲π روی نقطهٔ A است و کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد.) $\sin(۱۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$

(۲۷π روی نقطهٔ C است و کمان در ناحیهٔ دوم قرار می‌گیرد.) $\cos(۲۷\pi-\alpha)=\cos(\frac{۵۴}{۲}\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

($\frac{۵۱\pi}{۲}=۲۵/۵\pi$ روی نقطهٔ D است و کمان در ناحیهٔ چهارم قرار می‌گیرد.) $\cos(\frac{۵۱\pi}{۲}+\alpha)=\sin\alpha$

($\frac{۱۳\pi}{۲}=۶/۵\pi$ روی نقطهٔ B است و کمان در ناحیهٔ اول قرار می‌گیرد.) $\tan(\frac{۱۳\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

تست حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ=۰/۲۸$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

پاسخ تمام زاویه‌ها را برحسب ۱۵° می‌نویسیم:

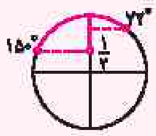
$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}\overset{\div\cos ۱۵^\circ}{=\!=\!=}\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست اگر $۷۲^\circ<x<۱۵۰^\circ$ و $\sin x=\frac{۱-۲m}{m}$ باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}\le m<\frac{۲}{۵}$ ۲) $۰<m\le\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}\le m<۱$ ۴) $۰<m<\frac{۲}{۵}$

پاسخ کافی است محدودهٔ زاویهٔ x را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم و سپس محدودهٔ $\sin x$ را بیابیم:



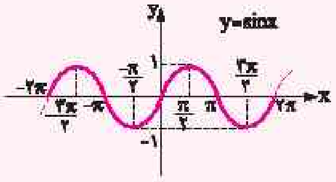
$$\frac{۱}{۲}<\sin x\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۱-۲m}{m}\le ۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{m}-۲\le ۱\Rightarrow\frac{۵}{۲}<\frac{۱}{m}\le ۳\Rightarrow\frac{۱}{۳}\le m<\frac{۲}{۵}$$

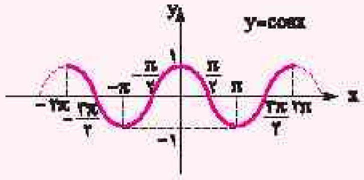
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و برد $[-۱،۱]$ هستند که نمودارشان به صورت زیر می‌باشد.





همان‌طور که مشخص است نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه‌های $[۰،۲\pi]$، $[-۲\pi،۰]$ و ... دقیقاً تکرار می‌شوند. به نمودار تابع $y=\sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y=\cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

روابط اولیهٔ مثلثات

روابط اولیهٔ زیر، بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است:

۱) $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

۲) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

۳) $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

۴) $\tan\alpha\cot\alpha=۱$

۵) $۱+\tan^۲\alpha=\dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$

۶) $۱+\cot^۲\alpha=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}$

تست اگر $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

پاسخ رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ را یک‌بار به توان ۲ و یک‌بار به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱\Rightarrow\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\xrightarrow{\text{به توان ۳}}\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha+۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)=۱$$

$$\Rightarrow\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha=۱-۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

روابط سینوس‌ها و کسینوس‌های مجموع و تفاضل دو کمان

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

تست حاصل $\sin ۱۱۰^\circ(\tan ۲۰^\circ+\tan ۳۵^\circ)$ کدام است؟

۱) $\cos ۱۵^\circ$ ۲) $\sin ۵۵^\circ$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

پاسخ

$$\sin ۱۱۰^\circ\left(\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}+\frac{\sin ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ}\right)=\sin ۱۱۰^\circ\left(\frac{\sin ۲۰^\circ\cos ۳۵^\circ+\cos ۲۰^\circ\sin ۳۵^\circ}{\cos ۲۰^\circ\cos ۳۵^\circ}\right)=\sin ۱۱۰^\circ\left(\frac{\sin(۲۰^\circ+۳۵^\circ)}{\cos ۲۰^\circ\cos ۳۵^\circ}\right)$$

$$=\sin ۱۱۰^\circ\left(\frac{\sin ۵۵^\circ}{\cos ۲۰^\circ\cos ۳۵^\circ}\right)\xrightarrow{\sin ۵۵^\circ=\cos ۳۵^\circ}\sin ۱۱۰^\circ\left(\frac{\cancel{\sin ۵۵^\circ}}{\cos ۲۰^\circ\cancel{\cos ۳۵^\circ}}\right)=\frac{\sin ۱۱۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲۰^\circ)}{\cos ۲۰^\circ}=\frac{\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}=۱$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

تست کسینوس زاویهٔ 15° کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

۳) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

پاسخ از کمان‌های 45° و 30° استفاده می‌کنیم:

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

دو اتحاد مهم

۱) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

۲) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

تست حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-2$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) 1

پاسخ با استفاده از دو اتحاد بالا، داریم:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

نسبت‌های مثلثاتی دوبرابر کمان

۱) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

از اتحادهای بالا، می‌توان نتایج زیر را گرفت:

۱) $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

۲) $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

۳) $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$

۴) $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$

۵) $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

۶) $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

تست اگر $\cos 4x=a$، حاصل $\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi+x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{a-1}{8}$ ۲) $\frac{1-a}{4}$ ۳) $\frac{1-a}{8}$ ۴) $\frac{a-1}{4}$

پاسخ با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$، داریم:

$$\cos 4x=1-2\sin^2 2x=a\Rightarrow \sin^2 2x=\frac{1-a}{2}$$

$$\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi+x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=(\sin x)(\cos x)(-\sin x)(-\cos x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{1-a}{8}$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست حاصل عبارت $A=\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ از عبارت مخرج مشترک می‌گیریم:

$$A=\frac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2(\cos 60^\circ\cos 10^\circ-\sin 60^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos(60^\circ+10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{2\cos 70^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}\xlongequal{\cos 70^\circ=\sin 20^\circ}4$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

نسبت‌های مثلثاتی سه‌برابر کمان

۱ $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

۲ $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

تست ساده‌شدهٔ عبارت $\cos 4x+\tan x\sin 4x$، کدام است؟

۱) $2\cos^2 x-1$ ۲) $2\sin^2 x+1$ ۳) $4\sin^2 x+1$ ۴) $4\cos^2 x-3$

پاسخ $\tan x$ را به صورت کسری می‌نویسیم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\cos 4x+\frac{\sin x}{\cos x}(\sin 4x)=\frac{\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x}{\cos x}=\frac{\cos(4x-x)}{\cos x}$$

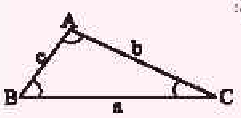
$$=\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x}=4\cos^2 x-3$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

حل مثلث

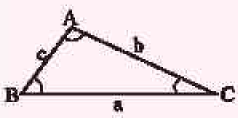
منظور از حل مثلث، پیداکردن تمام ضلع‌ها و زاویه‌های یک مثلث است.

مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویهٔ بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث (S) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



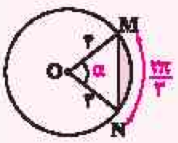
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$$

قضیهٔ سینوس‌ها: از تساوی مربوط به مساحت مثلث، قضیهٔ سینوس‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت:



$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

تست در شکل مقابل، اگر طول کمان MN برابر $\frac{2\pi}{3}$ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) $\frac{4\pi-12}{3}$ ۲) $\frac{3\pi-8}{3}$

۳) $\frac{4\pi-8}{3}$ ۴) $\frac{3\pi-6}{3}$

پاسخ ابتدا زاویهٔ α را برحسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\alpha=\frac{\widehat{MN}}{r}=\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}=\frac{\pi}{6}$$

حال، مساحت مثلث و قطاع را به دست می‌آوریم:

مساحت قطاع: $S_2=\frac{1}{2}(4)^2(\frac{\pi}{6})=\frac{4\pi}{3}$ و مساحت مثلث: $S_1=\frac{1}{2}(4)(4)\sin(\frac{\pi}{6})=4$

مساحت قسمت رنگی: $S=S_2-S_1=\frac{4\pi}{3}-4=\frac{4\pi-12}{3}$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

یادآوری مفاهیم اولیهٔ مثلثات

۱- اندازهٔ دو زاویه از مثلثی $\hat{A}=\frac{11\pi}{30}$ و $\hat{B}=34^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ سوم این مثلث چند رادیان است؟

۱) $\frac{2\pi}{9}$ ۲) $\frac{4\pi}{9}$ ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{9}$

۲- مساحت دایرهٔ مقابل، چندبرابر محیط آن است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۴

۳- دوچرخه‌سواری دور یک پیست دوچرخه‌سواری که به صورت دایره به قطر ۱۰ کیلومتر است، شروع به حرکت می‌کند. اگر این دوچرخه‌سوار روی محیط دایره ۲ کیلومتر حرکت کند، نسبت به مرکز دایره چه زاویه‌ای بر حسب درجه طی می‌کند؟

۱) ۰/۴ ۲) $\frac{18}{\pi}$ ۳) $\frac{36}{\pi}$ ۴) $\frac{72}{\pi}$

۴- حاصل $\cos(\frac{3\pi}{14})+\cos(\frac{5\pi}{14})+\cos(\frac{7\pi}{14})+\cos(\frac{9\pi}{14})+\cos(\frac{11\pi}{14})$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۵- حاصل عبارت $2\cos(\frac{-125\pi}{4})+3\tan(\frac{125\pi}{4})+4\cot(\frac{-125\pi}{4})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}-1$ ۲) $-\sqrt{2}+1$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{2}+1$

۶- اگر $\tan\theta=0/2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۱/۲ ۳) ۲ ۴) ۳

۷- مقدار عددی عبارت $A=\sin^2(\frac{\pi}{10})+\sin^2(\frac{2\pi}{5})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-2\cos\frac{3\pi}{5}$ ۴) $2\sin\frac{3\pi}{10}$

۸- حاصل عبارت $A=\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\dots+\cos^2 89^\circ$ کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۵ ۳) ۴۴/۵ ۴) ۴۵/۵

۹- حاصل $A=\log\tan 1^\circ+\log\tan 2^\circ+\dots+\log\tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۴۵ ۴) $45\tan 1^\circ$

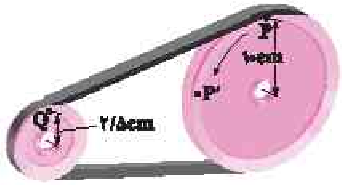
۱۰- اگر $|x|<\frac{\pi}{18}$ و $m=2\cos 6x+1$ باشد، مقادیر m در کدام بازه است؟

۱) $(1,2]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[2,3)$ ۴) $(2,3]$

۱۱- مساحت قطاعی به شعاع ۱۰ واحد و زاویهٔ مرکزی ۲ رادیان را با S و محیط همین قطاع را با P نمایش می‌دهیم. حاصل عبارت $S-P$ کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۲۰

۱۲- در شکل زیر یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های ۱۰cm و ۲/۵cm را به هم وصل کرده است. اگر قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{2}$ رادیان بچرخد (یعنی نقطهٔ P در موقعیت P' قرار گیرد)، آن‌گاه قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



۱) π ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۱۳- طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر و طول تیغهٔ آن ۱۹ سانتی‌متر است. اگر برف‌پاک‌کن کمانی به اندازهٔ ۱۲۰° را طی کند، چه مساحتی از شیشه را پاک می‌کند؟ $(\pi \simeq ۳)$

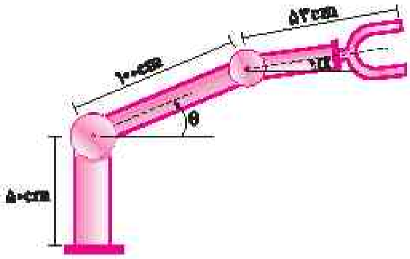
۱) ۴۷۹

۲) ۳۳۶

۳) ۵۵۱

۴) ۴۲۷

۱۴- در شکل زیر، اگر روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳/۵cm از سطح زمین، مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار دهد، زاویهٔ θ در این وضعیت چند درجه است؟



۱) صفر

۲) -۴۵°

۳) ۶۰°

۴) -۶۰°

۱۵- مساحت کل مخروطی به شعاع 2cm و طول مولد 5cm، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۱۰π ۲) ۱۲π ۳) ۱۴π ۴) ۱۶π

۱۶- اگر $\cos\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos(\frac{\pi}{۴} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۷- اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

۱۸- اگر $۲ = \frac{\sin(x - \frac{\pi}{۴})}{\sin(x + \frac{\pi}{۴})}$ باشد، $\tan x$ کدام است؟ (تجربی داخل ۹۷)

۱) -۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۳

۱۹- اگر $\alpha + \beta = ۱۳۵^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار کسر $\frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha\cos^۲\beta - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۰- مقدار عبارت $\frac{\cos ۲۰^\circ + \sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱- اگر $۲a + b = \frac{\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟

۱) $\sin b$ ۲) $\cos a$ ۳) $\frac{۱}{\sin a}$ ۴) $\frac{۱}{\cos b}$

۲۲- حاصل $\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ} - \frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۶)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۳- اگر $a + b = \frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $A = ۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲} - a)\cos(\frac{\pi}{۲} - b)$ کدام است؟

۱) $\sin ۴a$ ۲) $\cos ۴a$ ۳) $\sin^۲ ۲a$ ۴) $\cos^۲ ۲a$

۲۴- حاصل $\sin\frac{\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}$

۲۵- ساده‌شدهٔ عبارت $\cos 50^\circ(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ کدام است؟

۱) $\sin 20^\circ$ ۲) $\cos 20^\circ$ ۳) $2\sin 20^\circ$ ۴) $2\cos 20^\circ$

۲۶- اگر $\sin x - \cos x = -\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{8}$

۲۷- ساده‌شدهٔ عبارت $A = \frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^4\theta-\cos^4\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $8\cos^{-2}2\theta$ ۲) $8\sin^{-2}2\theta$ ۳) $16\cos^{-4}2\theta$ ۴) $16\sin^{-4}2\theta$

۲۸- ساده‌شدهٔ عبارت $A = \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16\sin 6^\circ}$ ۲) $\frac{1}{8\sin 6^\circ}$ ۳) $\frac{1}{\sin 6^\circ}$ ۴) $\frac{16}{\sin 6^\circ}$

۲۹- اگر $\tan x = \cot 4x$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟ $(x \neq \frac{k\pi}{4})$

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -1

۳۰- در یک متوازی‌الاضلاع، اندازهٔ دو قطر ۱۲ و ۸ و زاویهٔ بین دو قطر 135° است. مساحت این متوازی‌الاضلاع چندبرابر $\sqrt{2}$ است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۳۱- در مثلث ABC با معلوم‌بودن ضلع $BC = 3+\sqrt{3}$ ، $\hat{B} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 45^\circ$ ، اندازهٔ ضلع AC کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۳۲- با کدام ضابطهٔ $f(x)$ ، همواره تساوی $(-1)^{[x]}f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟ (ریاضی داخل ۹۱)

۱) $\sin \pi x$ ۲) $\cos \pi x$ ۳) $\sin 2\pi x$ ۴) $\cos 2\pi x$

۳۳- ساده‌شدهٔ عبارت $A = \frac{\sqrt{1+\sin 20^\circ} - \sqrt{1-\cos 70^\circ}}{\sin 10^\circ - \cos 10^\circ}$ کدام است؟

۱) $1-\tan 35^\circ$ ۲) $1-\cot 35^\circ$ ۳) $-1+\tan 35^\circ$ ۴) $-1+\cot 35^\circ$

۳۴- حاصل عبارت $\frac{\sin 5a - \sin 3a}{\cos 5a - \cos 3a}$ به ازای $a = 7/5^\circ$ ، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳۵- حاصل $[\sin 4]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۳۶- اگر $\log(\sin\frac{x}{2}) = a$ باشد، حاصل $\log(3-4\cos x+\cos 2x)$ کدام است؟

۱) $3\log 2 - 4a$ ۲) $4a + 3\log 2$ ۳) $2\log 3 - 4a$ ۴) $4a + 2\log 3$

۳۷- حاصل عبارت $4\cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۳۸- حاصل $\frac{\sqrt{1+\sin 50^\circ}}{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}$ ، برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

درس اول: تناوب و تانژانت

تابع متناوب

اگر نمودار یک تابع طوری باشد که همواره قسمتی از نمودار به طور مرتب و منظم تکرار شود، به آن تابع، متناوب و به کوچک‌ترین فاصله‌ای که تابع در آن تکرار می‌شود، دورهٔ تناوب تابع گویند.

تعریف ریاضی تابع متناوب: تابع f را متناوب می‌نامیم، هرگاه عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:

$$x+T \in D_f \quad , \quad f(x+T)=f(x)$$

کوچک‌ترین عدد T با این خاصیت را دورهٔ تناوب تابع f می‌نامند.

توابع متناوب برای مدل‌سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دورهٔ تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای دوره‌های بعدی پیش‌بینی کرد.

نکات مهم برای پیدا کردن دورهٔ تناوب

۱ اگر T دورهٔ تناوب $f(x)$ باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب $f(ax)$ برابر با $\frac{T}{|a|}$ است. در حالت کلی‌تر، دورهٔ تناوب $mf(ax+b)+n$ نیز برابر $\frac{T}{|a|}$ می‌باشد. یعنی مقادیر m، n و b تأثیری روی دورهٔ تناوب ندارند. ($a \neq 0$ و $m \neq 0$)

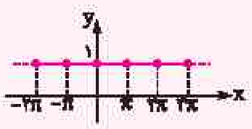
۲ دورهٔ تناوب توابع زیر را به خاطر بسپارید: $(n \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} y=\sin^{2n-1} ax \\ y=\cos^{2n-1} ax \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} y=\sin^{2n} ax \\ y=\cos^{2n} ax \end{cases} , \begin{cases} y=|\sin ax| \\ y=|\cos ax| \end{cases} , \begin{cases} y=\tan^{n} ax \\ y=\cot^{n} ax \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

۳ توابع ثابت به شکل کلی $f(x)=k$ متناوب‌اند، ولی دورهٔ تناوب ندارند.

۴ در توابع ثابت که به طور منظم و متوالی در نقاطی از $\mathbb{R}$ تعریف‌نشده باشند، فاصلهٔ دو نقطهٔ انفصال، دورهٔ تناوب تابع می‌باشد. برای مثال در تابع $y=\frac{\sin x}{\sin x}$، دامنهٔ تابع به صورت $\mathbb{R}-\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ می‌باشد، پس با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\pi$ می‌شود.



مثال دورهٔ تناوب هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $y=1-2\sin(3x+2)$　　۲) $y=\frac{2}{3+\tan \pi x}$　　۳) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

۴) $y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin^2 x$　　۵) $y=\tan 2x+\cot 2x$

پاسخ ۱) از اعدادی که در تابع وجود دارد فقط ضریب x در دورهٔ تناوب اهمیت دارد، پس $T=\frac{2\pi}{3}$ می‌شود.

۲) دورهٔ تناوب $\tan \pi x$ برابر $\frac{\pi}{|\pi|}=1$ است. پس دورهٔ تناوب تابع $y=\frac{2}{3+\tan \pi x}$ نیز برابر ۱ می‌باشد.

۳) تابع را به صورت ساده‌تر نوشته و دورهٔ تناوب آن را معلوم می‌کنیم:

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \Rightarrow T=\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$$

۴) ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-2\sin^2 x)+\sin^2 x=\frac{1}{2}$$

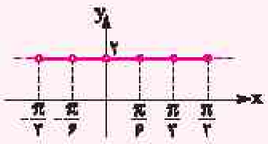
تابع ثابت $y=\frac{1}{2}$ متناوب است، اما چون کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع، گردش می‌کند معلوم نیست، اصطلاحاً می‌گوییم دورهٔ تناوب ندارد.

۵) تابع را به صورت ساده‌تر نوشته و دورهٔ تناوب آن را معلوم می‌کنیم:

$$y=\tan 2x+\cot 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\sin^2 2x+\cos^2 2x}{\sin 2x\cos 2x}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 4x}=\frac{2}{\sin 4x}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|4|}\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$$

تست در مورد دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x\cot x+\tan 3x\cot 3x$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{2}$ است.
۲) تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{6}$ است.
۳) تابع متناوب است، اما دورهٔ تناوب ندارد.
۴) تابع متناوب نیست.



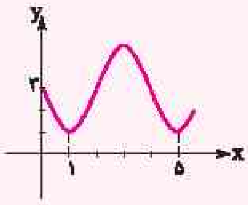
پاسخ این تابع با دامنهٔ $D_f=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{6}|k\in\mathbb{Z}\}$ برابر مقدار ثابت $f(x)=1+1=2$ می‌باشد. با توجه به نمودار، این تابع متناوب است و دورهٔ تناوب تابع، فاصلهٔ دو نقطهٔ انفصال، یعنی $T=\frac{\pi}{6}$ است.
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

نکته توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ می‌باشند.
برای مثال مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=-8\cos(\frac{x}{3})-2$ برابر است با:
$$Max=|-8|-2=6\ ;\ \min=-|-8|-2=-10$$

نکته در تابع $y=a\sin bx+c$ اگر a و b هم‌علامت باشند آن‌گاه با شروع از مبدأ، نمودار به صورت می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است.) اما اگر a و b غیر هم‌علامت باشند، آن‌گاه با شروع از مبدأ نمودار به صورت در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است).

نکته در تابع $y=a\cos bx+c$ اگر a مثبت باشد آن‌گاه با شروع از مبدأ، نمودار به صورت می‌شود (یعنی نمودار در ابتدا نزولی است). اما اگر a منفی باشد، آن‌گاه با شروع از مبدأ نمودار به صورت در می‌آید (یعنی نمودار در ابتدا صعودی است.) حتماً توجه دارید که چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ پس علامت b تأثیری روی نمودار ندارد.

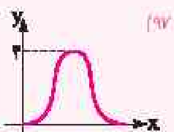
تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{25}{3}$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

پاسخ از روی نمودار مشخص است که $f(0)=3$ و دورهٔ تناوب تابع برابر $5-1=4$ می‌باشد بنابراین:
$$f(0)=3\Rightarrow a+\sin(0)=3\Rightarrow a=3$$
$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}\Rightarrow\frac{2}{|b|}=4\Rightarrow|b|=\frac{1}{2}\Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$
چون نمودار با شروع از مبدأ به صورت می‌باشد (یعنی در ابتدا نمودار نزولی است) پس با توجه به نکات قبل علامت b منفی است. بنابراین $b=-\frac{1}{2}$ و داریم:
$$y=3+\sin(\frac{-\pi x}{2})\Rightarrow y(\frac{25}{3})=3-\sin(\frac{25\pi}{6})=3-\sin(4\pi+\frac{\pi}{6})=3-\sin\frac{\pi}{6}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست شکل مقابل نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ در بازهٔ $(0,4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۷)



۱) -2
۲) -1
۳) ۱
۴) ۲

پاسخ چون نمودار از مبدأ مختصات گذشته، پس $f(0)=0$ است:
$$f(0)=0\Rightarrow a+b\cos(0)=0\Rightarrow a+b=0$$
در تابع $y=b\cos(\frac{\pi x}{2})+a$، اگر $b>0$ باشد، نمودار تابع با شروع از مبدأ به صورت و اگر $b<0$ باشد نمودار به صورت در می‌آید. پس با توجه به شکل صورت سؤال، $b<0$ است.
از طرفی می‌دانیم مقدار ماکزیمم تابع $y=b\cos(\frac{\pi x}{2})+a$ برابر $|b|+a$ است. پس داریم:
$$|b|+a=4\xrightarrow{b<0}-b+a=4$$
با حل دستگاه، مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم:
$$\begin{cases}a+b=0\\a-b=4\end{cases}\Rightarrow a=2\ ,\ b=-2$$
بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

تست مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر به صورت $y=a\cos(\pi bx)+c$ $(a,b>0)$ به نظر می‌رسد. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک‌بار تکرار شده باشند و بیشترین و کم‌ترین دما به ترتیب ۲۷ و ۱۲ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، آن‌گاه حاصل $b(c-a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ از فرضیات سؤال نتیجه می‌گیریم $T=12$ (دورهٔ تناوب)، $Max=27$ و $min=12$ می‌باشد. بنابراین:

$$y=a\cos(\pi bx)+c\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|\pi b|}\Rightarrow\frac{2}{|b|}=12\xrightarrow{b>0}b=\frac{1}{6}$$

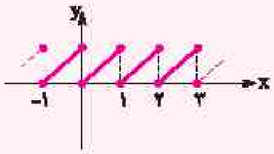
$$\begin{cases}Max=|a|+c\Rightarrow 27=|a|+c\\ min=-|a|+c\Rightarrow 12=-|a|+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{39}{2}=19/5\\ |a|=7/5\xrightarrow{a>0}a=7/5\end{cases}$$

$$b(c-a)=\frac{1}{6}(19/5-7/5)=\frac{1}{6}(12)=2$$

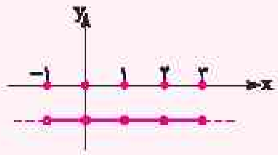
بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

مثال نمودار توابع $y=x-[x]$، $y=[x]+[-x]$ و $y=(-1)^{[x]}$ را رسم کنید و دورهٔ تناوب هر یک را به دست آورید.

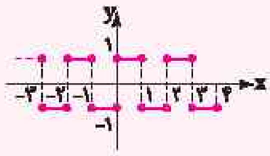
پاسخ نمودار این توابع به صورت زیر می‌باشد: (برای اطلاعات بیشتر به کتاب حسابان یازدهم میکرو مراجعه کنید.)



$y=x-[x]$



$y=[x]+[-x]$



$y=(-1)^{[x]}$

از روی شکل‌های بالا می‌توان گفت دورهٔ تناوب توابع $y=x-[x]$ و $y=[x]+[-x]$ برابر ۱ و دورهٔ تناوب تابع $y=(-1)^{[x]}$ برابر ۲ است.

نکته می‌دانیم اگر T دورهٔ تناوب $f(x)$ باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب $f(ax)$ برابر با $\frac{T}{|a|}$ است. بنابراین داریم:

$(a\neq 0)$ $\quad y=(-1)^{[ax]}\Rightarrow T=\frac{2}{|a|}$ $\quad y=[ax]+[-ax]\Rightarrow T=\frac{1}{|a|}$ $\quad y=ax-[ax]\Rightarrow T=\frac{1}{|a|}$

تست اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin ax\cos bx-\cos ax\sin bx$ برابر 2π و دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\frac{x}{a}-[\frac{x}{a}]$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه نمودار تابع $y=\cos bx$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟ $(a>b>0)$

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ابتدا تابع $f(x)$ را ساده کرده و دورهٔ تناوب آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\sin ax\cos bx-\cos ax\sin bx=\sin(a-b)x\Rightarrow T_f=\frac{2\pi}{|a-b|}\xrightarrow{a>b>0}T_f=\frac{2\pi}{a-b}\Rightarrow\frac{2\pi}{a-b}=2\pi\Rightarrow a-b=1$$

$$g(x)=\frac{x}{a}-[\frac{x}{a}]\Rightarrow T_g=\frac{1}{|\frac{1}{a}|}\Rightarrow|a|\xrightarrow{a>0}a=2\xrightarrow{a-b=1}b=2$$

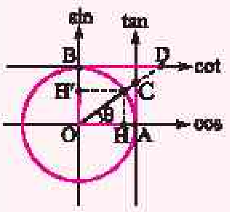
حال ریشه‌های $\cos bx=0$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{0<x<2\pi}x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

پس $y=\cos 2x$، در ۴ نقطه محور xها را قطع می‌کند. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

تابع تانژانت

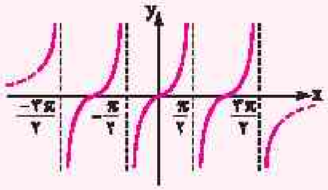
در دایرهٔ مثلثاتی اگر از A، محوری موازی و هم‌جهت با محور سینوس رسم شود، محور تانژانت و اگر از B، محوری موازی و هم‌جهت با محور کسینوس رسم شود، محور کتانژانت نامیده می‌شود.



اگر θ اندازهٔ یک کمان باشد، در این صورت اندازهٔ نسبت‌های مثلثاتی برابر با اندازهٔ جبری پاره‌خط‌های زیر است:

$\sin\theta=OH'$ و $\cos\theta=OH$ و $\tan\theta=AC$ و $\cot\theta=BD$

نمودار تابع تانژانت روی محورهای مختصات به صورت مقابل می‌باشد:



ویژگی‌های تابع $y=\tan x$

۱ دامنه و برد آن به صورت مقابل است: $D_y=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$; $R_y=\mathbb{R}$

۲ تابع غیریکنوا است.

۳ دورهٔ تناوب آن برابر π می‌باشد و در هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و ... اکیداً صعودی است.

۴ نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تابع تناوب و دورهٔ متناوب

۳۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin^2 2x.\cos^2 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) π

۴۰- دورهٔ تناوب کدام تابع عدد بزرگ‌تری است؟

۱) $y=\frac{1}{\sin^2 \pi x+3}$ ۲) $y=\frac{1}{2\cos \pi x+1}$ ۳) $y=2\tan 2\pi x-1$ ۴) $y=\cos^4 \pi x+1$

۴۱- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan 3x-\cot 3x$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۸۸)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۴۲- اگر دورهٔ تناوب $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ برابر T_1 و دورهٔ تناوب $g(x)=\cos 3x\cos x+\sin 3x\sin x$ برابر T_2 باشد، حاصل $\frac{T_1}{T_2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan 2x+\cot 2x$ را T_1 و دورهٔ تناوب $g(x)=\frac{\sin 3x}{\sin 3x}$ را T_2 می‌نامیم. حاصل $\frac{T_2}{T_1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

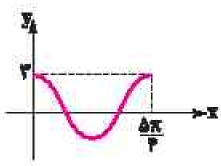
۴۴- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos^2 x+\sin^4 x$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۴۵- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=(\tan x+\cot x)^2-\tan^2 x-\cot^2 x$ کدام است؟

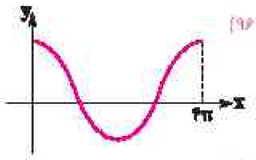
۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) دورهٔ تناوب ندارد.

۴۶- اگر قسمتی از نمودار تابع $y=b\cos ax$ به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟



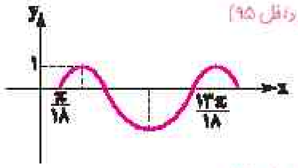
۱) $\frac{5}{8}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{15}{8}$ ۴) $\frac{21}{8}$

۴۷- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}+۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۶)



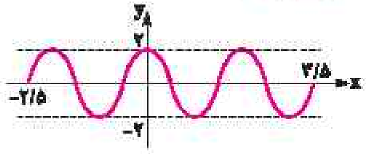
۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) صفر

۴۸- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابعی با ضابطهٔ $y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵)



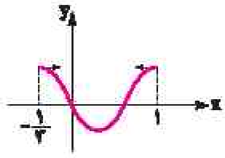
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۴۹- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(\pi(\frac{۱}{۴}+bx))$ می‌باشد. حاصل ab کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)



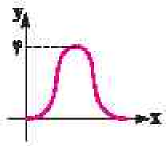
۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

۵۰- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos(ax+\frac{۱}{۲})\pi$ می‌باشد. a کدام است؟



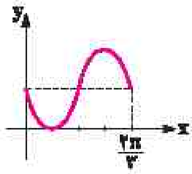
۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{-۳}{۲}$

۵۱- شکل مقابل، نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازهٔ $(۰,۴)$ است. b کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۷)



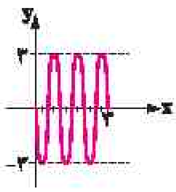
۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۵۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=۱-\sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۷\pi}{۶}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۶)



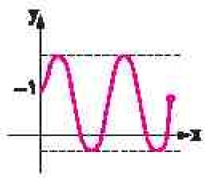
۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

۵۳- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. مقدار ab کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)



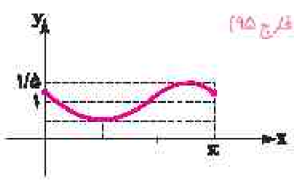
۱) -۶
۲) -۳
۳) ۴/۵
۴) ۶

۵۴- شکل مقابل نمودار تابع $y=۱+a\sin(\pi bx)$ در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

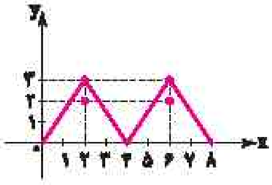
۵۵- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+a\sin(bx-\frac{\pi}{۶})$ است. $a+b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

۵۶- اگر دورهٔ تناوب تابع $y=f(۲x+۱)$ برابر ۴ باشد، دورهٔ تناوب $y=۲f(-\frac{x}{۲})+۱$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۲



۵۷- قسمتی از نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ به‌صورت مقابل رسم شده است. حاصل $f(22)+f(-9)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{9}{2}$

۵۸- اگر تابع f یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲ باشد و به ازای هر $-2\le x<0$ داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x+2}$، آن‌گاه مقدار $f(-9/96)$ کدام است؟

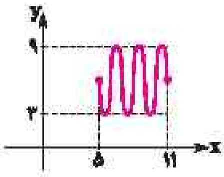
۱) ۰/۲ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

۵۹- اگر $f(x-\frac{1}{4})=f(x+\frac{3}{4})$ آن‌گاه $f(x)$ کدام تابع زیر می‌تواند باشد؟

۱) $y=|2\sin\frac{\pi x}{3}|$ ۲) $y=1-\cos\frac{\pi x}{2}$ ۳) $y=\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]$ ۴) $y=\frac{x}{3}-[\frac{x}{3}]$

۶۰- اگر داده‌های مربوط به دمای یک شهر هر ۱۲ ماه یک‌بار به صورتی تکرار شوند که بیشترین و کم‌ترین دما در داده‌ها به ترتیب ۱۴ و ۶ درجهٔ سانتی‌گراد باشند، کدام تابع کسینوسی برای این داده‌ها مناسب است؟

۱) $y=4\cos(\frac{\pi x}{6})+10$ ۲) $y=4\cos(\frac{\pi x}{3})+10$ ۳) $y=10\cos(\frac{\pi x}{6})+4$ ۴) $y=10\cos(\frac{\pi x}{3})+4$



۶۱- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، ضابطهٔ $f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x)=2\sin(\pi x)+6$

۲) $f(x)=3\sin(\pi x)+6$

۳) $f(x)=2\sin(2\pi x)+6$

۴) $f(x)=3\sin(2\pi x)+6$

۶۲- دورهٔ تناوب $f(x)=\cos(2\tan x)+2\sin^2(\tan x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) هر مقدار مثبت می‌تواند باشد.

۶۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\pi x$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) متناوب نیست.

۶۴- دورهٔ تناوب $f(x)=\frac{\cos 4x+2\sin^2 x}{[2x]+[-2x]}$ کدام است؟

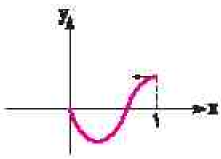
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) دورهٔ تناوب ندارد.

۶۵- دورهٔ تناوب $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۶- دورهٔ تناوب $f(x)=\sin x.\sin 3x$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$



۶۷- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos(\pi(ax+\frac{1}{4}))$ می‌باشد. a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۶۸- نمودار تابع به معادلهٔ $y=-4\cos(\frac{\pi}{4}-3\pi x)$ روی بازهٔ $[-1,1]$، در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\cos(\cos\pi x)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) تابع متناوب نیست.

ویژگی‌های تابع $y=\tan x$

۷۰- کدام گزاره در مورد تابع $f(x)=\tan x$ نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) در دامنه‌اش صعودی است.

۲) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن غیرصعودی باشد.

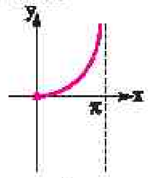
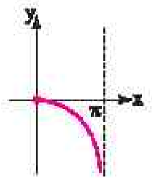
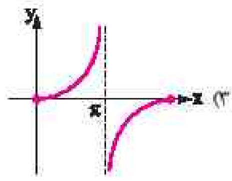
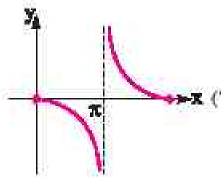
۳) در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۴) می‌توان بازه‌ای یافت که در آن غیرنزولی باشد.

۷۱- با فرض $\frac{۳\pi}{۴}<\alpha<\pi$ و $\tan\alpha=\frac{۲}{m-۱}$، حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $m<-۱$ ۲) $m<۱$ ۳) $-۱<m<۱$ ۴) $-۲<m<-۱$

۷۲- نمودار تابع $y=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۷۳- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}}$ به ترتیب در بازه‌های $(۰,\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ چگونه است؟

۱) صعودی ـ صعودی ۲) صعودی ـ نزولی ۳) نزولی ـ صعودی ۴) نزولی ـ نزولی

۷۴- حاصل $[\tan\frac{\pi}{۸}]+[\tan\frac{۳\pi}{۸}]+[\tan\frac{۵\pi}{۸}]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۲

درس دوم: معادلات مثلثاتی

رابطهٔ تانژانت مجموع و تفاضل دو کمان

$$\text{۱}\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\text{۲}\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

در رابطهٔ $\tan(\alpha+\beta)$ اگر فرض کنیم $\beta=\alpha$، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

نتیجه با استفاده از رابطهٔ تانژانت مجموع یعنی $\tan(\alpha+\beta)$، روابط زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

$$\text{۱}\quad \tan(\frac{\pi}{۴}+x)=\frac{۱+\tan x}{۱-\tan x}$$

$$\text{۲}\quad \tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$$

تست حاصل عبارت $\tan ۷۵^\circ$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۳-\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۴-\sqrt{۳}$

پاسخ از کمان‌های ۳۰° و ۴۵° استفاده می‌کنیم:

$$\tan ۷۵^\circ=\tan(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\frac{\tan ۴۵^\circ+\tan ۳۰^\circ}{۱-\tan ۴۵^\circ\tan ۳۰^\circ}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}\times\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}=\frac{۱۲+۶\sqrt{۳}}{۶}=۲+\sqrt{۳}$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست اگر $\tan(a-b)=\frac{۳}{۷}$ و $\tan(a+b)=\frac{۲}{۵}$، مقدار عددی $\tan ۲a$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ با توجه به تساوی $۲a=(a+b)+(a-b)$ داریم:

$$\tan ۲a=\tan((a+b)+(a-b))=\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{۱-\tan(a+b)\tan(a-b)}=\frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۷}}{۱-(\frac{۲}{۵})(\frac{۳}{۷})}=\frac{\frac{۲۹}{۳۵}}{\frac{۲۹}{۳۵}}=۱$$

بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

پاسخنامهٔ تشریحی

۱ ۲ ابتدا طبق رابطهٔ $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$، زاویهٔ B را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{34}{180}=\frac{R}{\pi} \xrightarrow{\hat{R}=\hat{B}} \hat{B}=\frac{17\pi}{90}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع زوایای داخلی یک مثلث، 180°، معادل π رادیان است. پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \frac{11\pi}{30}+\frac{17\pi}{90}+\hat{C}=\pi \Rightarrow \hat{C}=\pi-\frac{11\pi}{30}-\frac{17\pi}{90}=\frac{90\pi-33\pi-17\pi}{90}=\frac{40\pi}{90}=\frac{4\pi}{9}$$

۲ ۳ با توجه به رابطهٔ $l=r\theta$، داریم:

$$l=8, \theta=2 \Rightarrow \theta=\frac{l}{r} \Rightarrow 2=\frac{8}{r} \Rightarrow r=4$$

$S=\pi r^2=16\pi$: مساحت دایره — محیط دایره : $P=2\pi r=8\pi \quad \Rightarrow \frac{S}{P}=\frac{16\pi}{8\pi}=2$

۳ ۴ با توجه به سؤال، $r=5$ و $l=2$ می‌باشد. پس داریم:

$$l=r\theta \Rightarrow 2=5\theta \Rightarrow \theta=\frac{2}{5}$$

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180}=\frac{\frac{2}{5}}{\pi} \Rightarrow D=\frac{72^\circ}{\pi}$$

۴ ۲ می‌دانیم $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$، بنابراین داریم:

$$\cos(\frac{3\pi}{14})+\cos(\frac{5\pi}{14})+\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\pi-\frac{5\pi}{14})+\cos(\pi-\frac{3\pi}{14})=\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+0-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}=0$$

۵ ۱ ابتدا کسر $\frac{125\pi}{4}$ را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم و سپس عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{125}{4}=31+\frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos(-31\pi-\frac{\pi}{4})+3\tan(31\pi+\frac{\pi}{4})+4\cot(-31\pi-\frac{\pi}{4})$$

$$=-2\cos\frac{\pi}{4}+3\tan\frac{\pi}{4}-4\cot\frac{\pi}{4}=-2(\frac{\sqrt{2}}{2})+3-4=-\sqrt{2}-1$$

۶ ۴

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{2\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{0/2})$$

$$=\frac{1}{2}\times 6=3$$

۷ ۱ اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه $\sin\beta=\cos\alpha$. پس:

$$\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\frac{2\pi}{5})=\cos(\frac{\pi}{10}) \Rightarrow A=\sin^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{\pi}{10}=1$$

۸ ۳ اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه $\cos\alpha=\sin\beta$. پس:

$1^\circ+89^\circ=90^\circ \Rightarrow \cos^2 89^\circ=\sin^2 1^\circ$ و $2^\circ+88^\circ=90^\circ \Rightarrow \cos^2 88^\circ=\sin^2 2^\circ$ و ...

$$\Rightarrow A=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ=$$

$$(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ$$

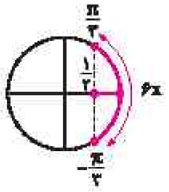
$$\Rightarrow A=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{۴۴تا}}+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=44+\frac{1}{2}=44/5$$

۹ ۲ با توجه به رابطهٔ $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$، داریم:

$$\log\tan 1^\circ+\log\tan 2^\circ+\cdots+\log\tan 89^\circ=\log(\tan 1^\circ\tan 2^\circ\tan 3^\circ\ldots\tan 89^\circ)$$

$$=\log((\tan 1^\circ\underbrace{\tan 89^\circ}_{\cot 1^\circ})(\tan 2^\circ\underbrace{\tan 88^\circ}_{\cot 2^\circ})\ldots(\tan 45^\circ))=\log(1\times 1\times\ldots\times 1)=\log 1=0$$

۱۰ ۴

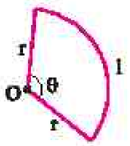


$$|x|<\frac{\pi}{18}\Rightarrow-\frac{\pi}{18}<x<\frac{\pi}{18}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}<6x<\frac{\pi}{3}$$

کافی است کمان ۶x را بر روی دایرهٔ مثلثاتی علامت بزنیم و سپس بر اساس محدودهٔ کمان ۶x، مقادیر $\cos 6x$ را بیابیم:

$$\frac{1}{2}<\cos 6x\le 1\Rightarrow 2<2\cos 6x+1\le 3 \quad و \quad m=2\cos 6x+1\Rightarrow 2<m\le 3$$

۱۱ ۱ ابتدا مساحت قطاع را می‌یابیم:



مساحت : $S=\frac{r^2}{2}\theta\Rightarrow S=\frac{(10)^2}{2}\times 2=100$

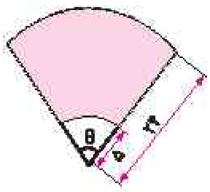
می‌دانیم که محیط قطاع دورتادور قطاع می‌باشد که شامل دو شعاع (۲r) و کمان آن (l) است. پس داریم:

$$P=2r+l\xrightarrow{l=r\theta}P=2(10)+10(2)=40\Rightarrow S-P=60$$

۱۲ ۲ چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس میزان حرکت نقطهٔ P و Q بر قرقره‌ها (l یا طول کمان طی‌شده) برابر می‌باشد و بر طبق فرمول $l=r\theta$، داریم:

$$l_1=l_2\Rightarrow r_1\theta_1=r_2\theta_2\Rightarrow 10\times\frac{\pi}{2}=2/5\times\theta_2\Rightarrow\theta_2=2\pi\,rad$$

۱۳ ۳ با توجه به رابطهٔ $\frac{D}{R}=\frac{180}{\pi}$، زاویه‌ای که برف‌پاک‌کن طی می‌کند را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

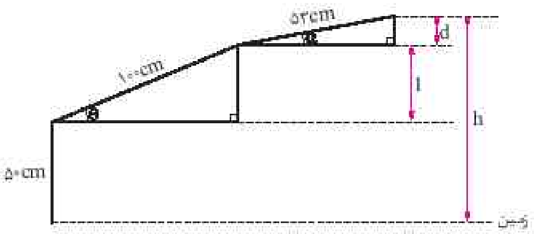


$$\frac{120}{R}=\frac{180}{\pi}\Rightarrow R=\frac{2\pi}{3}rad$$

حال طبق فرمول مساحت قطاع دایره $S=\frac{r^2}{2}\theta$، مساحت دو قطاع با زاویهٔ مرکزی یکسان $(\theta=\frac{2\pi}{3})$ و شعاع‌های $r_1=5cm$ و $r_2=24cm$ را یافته و از هم کم می‌کنیم تا مساحت شیشهٔ پاک‌شده توسط برف‌پاک‌کن به دست آید:

$$\Delta S=S_2-S_1=\frac{r_2^2}{2}\theta-\frac{r_1^2}{2}\theta=\frac{\theta}{2}(r_2^2-r_1^2)=\frac{\pi}{3}(24^2-5^2)\xlongequal{\pi=3}551\,cm^2$$

۱۴ ۱ کافی است وضعیت ربات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases}\sin\theta=\frac{l}{100}\Rightarrow l=100\sin\theta\\ \sin\alpha=\frac{d}{53}\Rightarrow d=53\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow h=50+l+d=50+100\sin\theta+53\sin\alpha$$

بر اساس فرض مسئله، $h=23/5\ cm$ و $\alpha=-30^\circ$ می‌باشند. پس داریم:

$$23/5=50+100\sin\theta+53\sin(-30^\circ)\Rightarrow 100\sin\theta=23/5-50-53(-\frac{1}{2})=0\Rightarrow\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0$$

۱۵ ۳ مساحت کل مخروط از مساحت قاعده $(A_1=\pi r^2)$ و مساحت جانبی $(A_2=\pi rL)$ تشکیل شده است. پس داریم:

مساحت کل مخروط : $S=A_1+A_2=\pi r^2+\pi rL=\pi(2)^2+\pi(2\times 5)=14\pi\ cm^2$

۱۶ ۱

$$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\cancel{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha-\cancel{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$

چون انتهای کمان α در ربع چهارم می‌باشد، پس $\sin\alpha<0$ است، بنابراین:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{7}{9}}=-\sqrt{\frac{2}{9}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-\sqrt{2}}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

۱۷ ۱ طرفین تساوی $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ را به توان ۲ می‌رسانیم. داریم:

$$\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{\frac{1}{9}-1}{2}=-\frac{4}{9}$$

حال با توجه به اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$، داریم:

$$\sin^3x+\cos^3x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=(\frac{1}{3})^3-3(\frac{-4}{9})(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{4}{9}=\frac{13}{27}$$

۱۸ ۱ با استفاده از اتحاد $\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\cos a\sin b$، داریم:

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=۲\Rightarrow\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}-\cos x\sin\frac{\pi}{۴}}{\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\cos x\sin\frac{\pi}{۴}}=۲\xrightarrow{\sin\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\frac{\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(\sin x-\cos x)}{\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}(\sin x+\cos x)}=۲$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}\sin x-\cos x=۲\sin x+۲\cos x\Rightarrow-\sin x=۳\cos x\Rightarrow-\frac{\sin x}{\cos x}=۳\Rightarrow\tan x=-۳$$

۱۹ ۴ ابتدا در صورت و مخرج از اتحاد مزدوج استفاده کرده و سپس روابط سینوس و کسینوس مجموع و تفاضل دو کمان را می‌نویسیم:

$$A=\frac{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\cot(\alpha-\beta)\cot(\alpha+\beta)$$

$$\alpha+\beta=۱۳۵^\circ\Rightarrow\cot(\alpha+\beta)=-۱\quad\text{و}\quad\tan(\alpha-\beta)=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cot(\alpha-\beta)=\frac{۴}{۳}\Rightarrow A=(\frac{۴}{۳})(-۱)=-\frac{۴}{۳}$$

۲۰ ۳ عدد ۲ را از صورت کسر فاکتور گرفته و به‌جای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، $\sin$ و $\cos$ کمان‌های مناسب را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲(\frac{۱}{۲}\cos ۲۰^\circ+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲۰^\circ)}{\cos ۴۰^\circ}=\frac{۲(\cos ۶۰^\circ\cos ۲۰^\circ+\sin ۶۰^\circ\sin ۲۰^\circ)}{\cos ۴۰^\circ}\xrightarrow{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)}\frac{۲\cos(۶۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos ۴۰^\circ}=۲$$

۲۱ ۴

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

با توجه به این‌که $۲a+b=\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد، پس $a+b=\frac{\pi}{۲}-a$ است. بنابراین:

$$\sin(a+b)=\sin(\frac{\pi}{۲}-a)=\cos a\Rightarrow\tan a+\tan b=\frac{\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cos b}=\frac{۱}{\cos b}$$

۲۲ ۳ با توجه به روابط $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ و $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، داریم:

$$\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}-\frac{۱}{\cos ۱۵^\circ}=\frac{\cos ۱۵^\circ-\sin ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ\cos ۱۵^\circ}=\frac{-\sqrt{۲}\sin(۱۵^\circ-۴۵^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ}=\frac{-\sqrt{۲}\sin(-۳۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۲}\cancel{\sin ۳۰^\circ}}{\frac{۱}{۲}\cancel{\sin ۳۰^\circ}}=۲\sqrt{۲}$$

۲۳ ۱ با توجه به روابط $\cos(\frac{\pi}{۲}-a)=\sin a$ و $\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=\sin b$، داریم:

$$A=۸\cos a\cos b\sin a\sin b=۸\sin a\cos a\sin b\cos b\xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x}۸\times\frac{۱}{۲}\sin ۲a\times\frac{۱}{۲}\sin ۲b=۲\sin ۲a\sin ۲b$$

اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد، آن‌گاه در عبارت A به‌جای b عبارت $\frac{\pi}{۴}-a$ را قرار می‌دهیم:

$$A=۲\sin ۲a.\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)=۲\sin ۲a\cos ۲a\xrightarrow{۲\sin x\cos x=\sin ۲x}\sin ۴a$$

۲۴ ۱ اگر در اتحاد $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$، به‌جای x زاویهٔ $\frac{\pi}{۸}$ قرار دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$۱-\cos\frac{\pi}{۴}=۲\sin^۲\frac{\pi}{۸}\Rightarrow\sin^۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}\xrightarrow{\frac{\pi}{۸}\text{ در ربع اول قرار دارد.}}\sin\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

۲۵ ۴ با توجه به این‌که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و با گرفتن مخرج مشترک، $\tan ۷۰^\circ+\tan ۱۰^\circ$ را به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\cos ۵۰^\circ(\frac{\sin ۷۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ}+\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ})=\cos ۵۰^\circ(\frac{\sin ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ+\cos ۷۰^\circ\sin ۱۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ})=\frac{\cos ۵۰^\circ\sin ۸۰^\circ}{\cos ۷۰^\circ\cos ۱۰^\circ}$$

$$=\frac{\sin ۴۰^\circ\cancel{\cos ۱۰^\circ}}{\sin ۲۰^\circ\cancel{\cos ۱۰^\circ}}=\frac{۲\cancel{\sin ۲۰^\circ}\cos ۲۰^\circ}{\cancel{\sin ۲۰^\circ}}=۲\cos ۲۰^\circ$$

می‌توانستی از فرمول $\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$ هم استفاده کنی.

۲۶ ۴ طرفین عبارت $\sin x-\cos x=\frac{-1}{2}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\frac{1}{4}\Rightarrow 2\sin x\cos x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow \sin 2x=\frac{3}{4}$$

$$\cos 4x=\cos(2(2x))=1-2\sin^2 2x=1-2(\frac{3}{4})^2=1-\frac{9}{8}=-\frac{1}{8}$$

۲۷ ۴ با توجه به روابط $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ و $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ و همچنین $\sin^2 x+\cos^2 x=1$، داریم:

$$A=\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\times\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta}=\frac{\frac{1}{(\sin\theta\cos\theta)^2}}{\cos^2\theta\underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}}=\frac{1}{(\sin\theta.\cos\theta)^4}\xrightarrow{\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x}\frac{1}{(\frac{1}{2}\sin 2\theta)^4}=16\sin^{-4}2\theta$$

۲۸ ۱ بر اساس اتحاد $\sin 2x=2\sin x\cos x$، کافی است طرفین عبارت $A=\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ$ را در $\sin 12^\circ$ ضرب کنیم:

$$\sin 12^\circ\times A=\sin 12^\circ\times\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ$$

$$A\sin 12^\circ=\frac{1}{2}\sin 24^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ=\frac{1}{4}\sin 48^\circ\cos 48^\circ=\frac{1}{8}\sin 96^\circ=\frac{1}{8}\sin(90^\circ+6^\circ)=\frac{1}{8}\cos 6^\circ$$

$$\Rightarrow A\sin 12^\circ=\frac{1}{8}\cos 6^\circ\Rightarrow A=\frac{\frac{1}{8}\cos 6^\circ}{\sin 12^\circ}=\frac{\frac{1}{8}\cos 6^\circ}{2\sin 6^\circ\cos 6^\circ}=\frac{1}{16\sin 6^\circ}$$

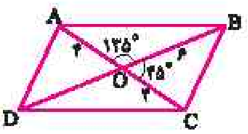
۲۹ ۲ می‌دانیم $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$. بنابراین مطابق فرض سؤال، داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\Rightarrow \sin x\sin 3x=\cos x\cos 3x\Rightarrow \cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=0$$

حال طبق رابطهٔ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$، داریم:

$$\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x=\cos(3x+x)=\cos(4x)=0$$

۳۰ ۲ روش اول: می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. چون $\sin 135^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ$، پس طبق فرمول $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$، مساحت دو مثلث AOB و BOC برابرند. در نتیجه برای تعیین مساحت متوازی‌الاضلاع کافی است چهاربرابر مساحت مثلث BOC را به دست آوریم:



$$S_{\overset{\Delta}{BOC}}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

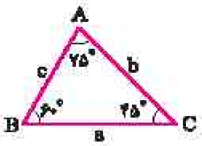
بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $24\sqrt{2}$ است.

روش دوم: در یک چهارضلعی به طول قطرهای d_1 و d_2 و زاویهٔ بین α، مساحت برابر $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$ می‌باشد، پس:

$$S=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin(135^\circ)=24\sqrt{2}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع 24برابر $\sqrt{2}$ است.

۳۱ ۴ می‌دانیم مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر 180° است، پس با توجه به $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=45^\circ$، نتیجه می‌گیریم $\hat{A}=75^\circ$ است. بنابراین با توجه به رابطهٔ سینوس‌ها، داریم:



$$\frac{a}{\sin 75^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\frac{3+\sqrt{3}}{\sin 75^\circ}=\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{3})}{\sin 75^\circ}$$

برای محاسبهٔ $\sin 75^\circ$، از بسط $\sin(a+b)$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(3+\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{2\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{2(3\sqrt{3}+3)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\overset{\text{گویا}}{=}\frac{2(3\sqrt{3}+3)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}=\frac{2(9\sqrt{2}-3\sqrt{6}+3\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{4}=3\sqrt{2}$$

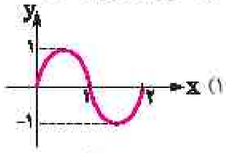
۳۲ ۱

$0\le x<1 \Rightarrow f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\ge 0$

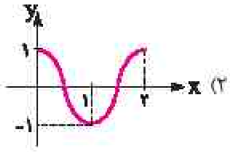
$1\le x<2 \Rightarrow -f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\le 0$

$2\le x<3 \Rightarrow f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\ge 0$

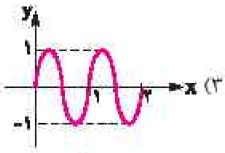
همین روند روی $\mathbb{R}$ ادامه پیدا می‌کند، یعنی $f(x)$ یک واحد در میان، مثبت و منفی می‌شود. حال به کمک رسم نمودار توابع گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام گزینه این ویژگی را دارد:



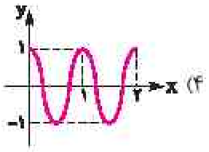
۱) $y=\sin\pi x$



۲) $y=\cos\pi x$



۳) $y=\sin 2\pi x$



۴) $y=\cos 2\pi x$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۳۳ ۲ با استفاده از روابط $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$، داریم:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \;,\; 1-\cos 2x=2\sin^2 x$$

حال عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\sqrt{1+\sin 20^\circ}-\sqrt{1-\cos 70^\circ}}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}\xrightarrow{\sin 20^\circ=\cos 70^\circ}\frac{\sqrt{1+\cos 70^\circ}-\sqrt{1-\cos 70^\circ}}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{2\cos^2 35^\circ}-\sqrt{2\sin^2 35^\circ}}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\overbrace{|\cos 35^\circ|}^{\text{مثبت}}-\sqrt{2}\overbrace{|\sin 35^\circ|}^{\text{مثبت}}}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}=\frac{\sqrt{2}(\cos 35^\circ-\sin 35^\circ)}{\sin 10^\circ-\cos 10^\circ}$$

سپس با استفاده از رابطهٔ $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$ مخرج کسر A را ساده می‌کنیم:

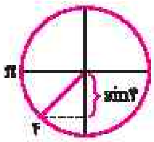
$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}(\cos 35^\circ-\sin 35^\circ)}{\cancel{\sqrt{2}}\sin(10^\circ-45^\circ)}=\frac{\cos 35^\circ-\sin 35^\circ}{\sin(-35^\circ)}\xrightarrow{\sin(-35^\circ)=-\sin 35^\circ}\frac{\cos 35^\circ-\sin 35^\circ}{-\sin 35^\circ}=\frac{\cos 35^\circ}{-\sin 35^\circ}-\frac{\sin 35^\circ}{-\sin 35^\circ}=-\cot 35^\circ+1$$

۳۴ ۲ ابتدا به‌جای $5a$ عبارت $4a+a$ و به‌جای $3a$ عبارت $4a-a$ قرار می‌دهیم و سپس از بسط مجموع و تفاضل زوایا برای سینوس و کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin 5a-\sin 3a}{\cos 5a-\cos 3a}=\frac{\sin(4a+a)-\sin(4a-a)}{\cos(4a+a)-\cos(4a-a)}=\frac{\sin 4a\cos a+\sin a\cos 4a-(\sin 4a\cos a-\sin a\cos 4a)}{\cos 4a\cos a-\sin 4a\sin a-(\cos 4a\cos a+\sin 4a\sin a)}$$

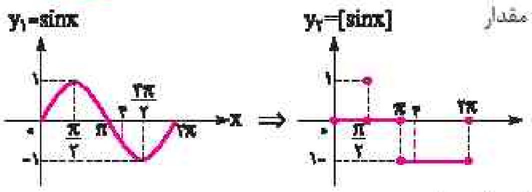
$$=\frac{\cancel{2}\,\cancel{\sin a}\cos 4a}{-\cancel{2}\sin 4a\,\cancel{\sin a}}=-\cot 4a\xrightarrow{a=7/5^\circ}-\cot(30^\circ)=-\sqrt{3}$$

۳۵ ۳ روش اول: منظور از عدد ۴ همان ۴ رادیان است که می‌توان گفت تقریباً برابر $4\times 57^\circ=228^\circ$ است. پس انتهای کمان ۴ رادیان در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد:



$$-1<\sin 4<0\Rightarrow[\sin 4]=-1$$

روش دوم: نمودار تابع $y_1=\sin x$ و $y_2=[\sin x]$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کرده و مقدار $y_2=[\sin x]$ را به ازای $x=4$ می‌یابیم:



پس حاصل $[\sin 4]$ برابر ۱- می‌باشد.

۳۶ ۲ با استفاده از قوانین مثلثات، عبارت $3-4\cos x+\cos 2x$ را برحسب $\sin\frac{x}{2}$ می‌نویسیم:

$$\cos 2x-4\cos x+3=2\cos^2 x-1-4\cos x+3=2\cos^2 x-4\cos x+2=2(\cos x-1)^2=2(-2\sin^2\frac{x}{2})^2=8\sin^4\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow\log(3-4\cos x+\cos 2x)=\log(8\sin^4\frac{x}{2})=\log 8+\log(\sin^4\frac{x}{2})=3\log 2+4\log(\sin\frac{x}{2})=3\log 2+4a$$

۳۷ ۴

$$4\cos 40^\circ - \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{4\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2(2\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \frac{1}{2})}{\cos 20^\circ} = \frac{2(2\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ)}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2(2\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos(40^\circ + 20^\circ))}{\cos 20^\circ}$$

حال با استفاده از بسط مجموع و تفاضل زوایا برای کسینوس، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{2(2\cos 40^\circ \cos 20^\circ - (\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ))}{\cos 20^\circ} = \frac{2(\cos 40^\circ \cos 20^\circ + \sin 40^\circ \sin 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cos(40^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{2\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 2$$

۳۸ ۳

$$\frac{\sqrt{1+\sin 50^\circ}}{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2} - 50^\circ)}}{\sin(30^\circ + 20^\circ) + \sin(30^\circ - 20^\circ)} = \frac{\sqrt{1+\cos 40^\circ}}{\sin(30^\circ + 20^\circ) + \sin(30^\circ - 20^\circ)}$$

حال بر اساس اتحاد $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ و هم‌چنین اتحادهای بسط مجموع و تفاضل زوایا برای سینوس، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\text{حاصل} = \frac{\sqrt{2\cos^2 20^\circ}}{\sin 30^\circ \cos 20^\circ + \cancel{\sin 20^\circ \cos 30^\circ} + \sin 30^\circ \cos 20^\circ - \cancel{\sin 20^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{2}\,\overbrace{|\cos 20^\circ|}^{\text{مثبت}}}{2\sin 30^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ}{2 \times \frac{1}{2} \times \cos 20^\circ} = \sqrt{2}$$

۳۹ ۳ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \sin^2 2x \cos^2 2x = (\sin 2x . \cos 2x)^2 = (\frac{1}{2}\sin 4x)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 4x$$

با توجه به این‌که دورهٔ تناوب $f(x) = m\sin^{2n}(ax+b)$ $(n \in \mathbb{N})$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد، پس دورهٔ تناوب این تابع برابر $T = \frac{\pi}{4}$ است.

۴۰ ۲ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y = \cos^{2n-1} ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ و دورهٔ تناوب توابع $y = \sin^{2n} ax$ ، $y = \cos^{2n} ax$ ، $y = \tan^n ax$ $(n \in \mathbb{N})$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است. بنابراین دورهٔ تناوب هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

$1)\ T = \frac{\pi}{\pi} = 1 \qquad 2)\ T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \qquad 3)\ T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \qquad 4)\ T = \frac{\pi}{\pi} = 1$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع گزینهٔ (۲) از همه بزرگ‌تر است.

۴۱ ۱ با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$، تابع به صورت $f(x) = -2\cot 6x$ درمی‌آید. حال با توجه به این‌که دورهٔ تناوب $y = k\cot^n(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد، پس دورهٔ تناوب $f(x) = -2\cot 6x$ برابر $\frac{\pi}{6}$ است.

۴۲ ۳ ابتدا هر یک از توابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم. با توجه به اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$، داریم:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \Rightarrow T_f = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{2}$$

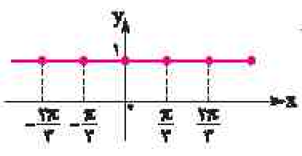
از طرفی می‌دانیم $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$، بنابراین:

$$g(x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos(3x - x) = \cos 2x \Rightarrow T_g = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$

۴۳ ۳ ابتدا تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \tan 2x + \cot 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 4x} = \frac{2}{\sin 4x} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$g(x) = \frac{\sin 3x}{\sin 3x}$ به صورت تابع ثابت $y_2 = 1$ می‌باشد که دامنهٔ آن $D = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$ است. پس طبق نمودار آن، فاصلهٔ دو نقطهٔ انفصال برابر دورهٔ تناوب است، یعنی $T_2 = \frac{\pi}{3}$ و در نتیجه $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.



۴۴ ۳ تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم، سپس دورهٔ تناوب آن را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=\cos^2 x+\sin^4 x=1-\sin^2 x+\sin^4 x=1-\sin^2 x(1-\sin^2 x)=1-\sin^2 x\cos^2 x=1-(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$$

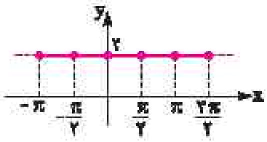
$$\Rightarrow f(x)=1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\Rightarrow T=\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$$

۴۵ ۱ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(\tan x+\cot x)^2-\tan^2 x-\cot^2 x=(\tan^2 x+\cot^2 x+2)-\tan^2 x-\cot^2 x=2$$

پس تابع به صورت ثابت $f(x)=2$ حاصل می‌شود. از طرفی مخرج کسرهای $\tan x$ و $\cot x$ نباید صفر شود، بنابراین:

$$\sin x\neq 0\ ،\ \cos x\neq 0\Rightarrow D_{f(x)}=\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\}$$



با توجه به نمودار تابع $f(x)$، دورهٔ تناوب آن برابر $T=\frac{\pi}{2}$ می‌شود.

۴۶ ۳ دورهٔ تناوب $y=b\cos ax$ برابر $T=\frac{2\pi}{|a|}$ می‌باشد. با توجه به نمودار داده‌شده، دورهٔ تناوب $y=b\cos ax$ برابر $\frac{5\pi}{4}$ است، بنابراین:

$$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow |a|=\frac{8}{5}\Rightarrow a=\pm\frac{8}{5}$$

تابع از نقطهٔ (۰،۳) می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$f(0)=3\Rightarrow 3=b\cos 0\Rightarrow b=3\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{\pm\frac{8}{5}}=\pm\frac{15}{8}$$

که در گزینه‌ها فقط عدد $\frac{15}{8}$ می‌باشد.

۴۷ ۱ با توجه به شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر 4π است. پس داریم:

$$y=\frac{1}{2}+2\cos mx\Rightarrow T=\frac{2\pi}{|m|}=4\pi\Rightarrow |m|=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

می‌دانیم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. پس تابع به صورت $y=\frac{1}{2}+2\cos\frac{1}{2}x$ درمی‌آید. در نتیجه:

$$x=\frac{16\pi}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{2}+2\cos\frac{8\pi}{3}=\frac{1}{2}+2\cos(3\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-2\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-2(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$$

۴۸ ۴

یادآوری

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ می‌باشند.

چون $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$، پس تابع به صورت $y=a+2\sin bx$ در می‌آید. از طرفی می‌دانیم ماکزیمم $y=a+2\sin bx$ برابر $a+2$ می‌شود که با توجه به نمودار $a+2=1$ و در نتیجه $a=-1$ است.

فاصلهٔ یک دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{13\pi}{18}-\frac{\pi}{18}=\frac{12\pi}{18}$ می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{12\pi}{18}\Rightarrow |b|=3\Rightarrow b=\pm 3$$

در تابع $y=-1+2\sin bx$ اگر $b>0$ باشد، نمودار آن با شروع از مبدأ به صورت و اگر $b<0$ باشد به صورت می‌شود. بنابراین طبق شکل داده‌شده $b>0$ است، پس $b=3$ و در نتیجه $a+b=2$ می‌شود.

۴۹ ۱ تابع را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$y=a\sin(\frac{\pi}{2}+\pi bx)=a\cos(\pi bx)$$

با توجه به نمودار، منحنی از نقطهٔ (۰،۲) می‌گذرد، پس:

$$y(0)=2\Rightarrow a\cos(0)=2\Rightarrow a=2$$

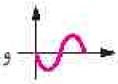
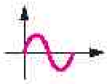
نمودار تابع در بازهٔ $[-2/5, 3/5]$ که طولی برابر ۶ دارد، ۳بار تکرار شده است، پس اگر دورهٔ تناوب $y=2\cos(\pi bx)$ را برابر T فرض کنیم، داریم:

$$3T=6\Rightarrow T=2\Rightarrow \frac{2\pi}{|\pi b|}=2\Rightarrow b=\pm 1\Rightarrow ab=\pm 2$$

هر دو قابل قبول هستند که بر اساس گزینه‌ها $ab=۲$ می‌باشد. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۵۰ ۳ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=\cos(ax+\frac{۱}{۲})\pi \Rightarrow y=\cos(\pi ax+\frac{\pi}{۲})=-\sin\pi ax$$

نمودار $y=-\sin\pi ax$، اگر a مثبت باشد به صورت  و اگر a منفی باشد، به صورت  درمی‌آید، پس با توجه به شکل داده‌شده، a مثبت است. از طرفی فاصلهٔ مشخص‌شده روی نمودار، یک دورهٔ تناوب تابع است، بنابراین $T=\frac{۴}{۳}$ می‌شود و در نتیجه داریم:

$$y=-\sin\pi ax\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\pi a|}=\frac{۲}{|a|}\Rightarrow\frac{۲}{|a|}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow|a|=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۳}{۲}$$

۵۱ ۱ چون نمودار از مبدأ مختصات گذشته، پس $f(۰)=۰$ است:

$$f(۰)=۰\Rightarrow a+b\cos(۰)=۰\Rightarrow a+b=۰$$

در تابع $y=b\cos(\frac{\pi x}{۲})+a$، اگر $b>۰$ باشد، نمودار تابع با شروع از مبدأ به صورت  و اگر $b<۰$ باشد نمودار به صورت  در می‌آید. پس با توجه به شکل صورت سؤال، $b<۰$ است. از طرفی می‌دانیم مقدار ماکزیمم تابع $y=b\cos(\frac{\pi x}{۲})+a$ برابر $|b|+a$ است. پس داریم:

$$|b|+a=۴\xrightarrow{b<۰}-b+a=۴$$

با حل دستگاه مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم:

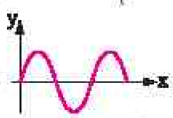
$$\begin{cases}a+b=۰\\a-b=۴\end{cases}\Rightarrow a=۲، b=-۲$$

۵۲ ۴ با توجه به نمودار داده‌شده، دورهٔ تناوب برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است. پس داریم:

$$y=۱-\sin mx\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|m|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow|m|=۳$$

می‌دانیم نمودار تابع $y=۱-\sin۳x$ با شروع از مبدأ، به صورت  و نمودار تابع $y=۱-\sin(-۳x)$ به صورت  می‌باشد، پس با توجه به شکل صورت سؤال، $m=۳$ است. بنابراین:

$$y=۱-\sin۳x\Rightarrow y(\frac{۷\pi}{۶})=۱-\sin\frac{۷\pi}{۲}=۱-(-۱)=۲$$

۵۳ ۱ با توجه به تابع $y=a\sin(b\pi x)$ درمی‌یابیم که اگر a و b هم‌علامت باشند، نمودار به صورت 

خواهد بود یعنی با شروع از مبدأ، ابتدا ماکزیمم و سپس مینیمم وجود دارد. پس بر اساس نمودار مطرح‌شده در تست، مشخص است که a و b غیرهم‌علامت هستند. بنابراین $ab<۰$ است.

از طرفی دیگر، ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin(b\pi x)$ به ترتیب برابر $|a|$ و $-|a|$ می‌باشند که با توجه به نمودار، $|a|=۳$ می‌شود.

و در آخر، تابع در بازهٔ $[۰،۳]$ سه‌بار تکرار شده است، پس اگر دورهٔ تناوب $y=a\sin(b\pi x)$ را T فرض کنیم، آن‌گاه:

$$۳T=۳\Rightarrow T=۱\Rightarrow\frac{۲\pi}{|\pi b|}=۱\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow|ab|=|a||b|=۶\xrightarrow{a.b<۰}ab=-۶$$

۵۴ ۳ قسمتی از نمودار تابع در بازهٔ $(۰،\frac{۴}{۳})$ دو بار تکرار شده است، پس دورهٔ تناوب آن برابر $\frac{۲}{۳}$ می‌شود. بنابراین داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|\pi b|}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow|b|=۳$$

هم‌چنین مینیمم تابع برابر ۱- است پس $۱-|a|=-۱$ و در نتیجه $|a|=۲$ می‌شود. از طرفی با توجه به نمودار، a و b هم‌علامت هستند بنابراین $a+b=\pm۵$ می‌باشد.

۵۵ ۴ با توجه به شکل $f(۰)>۱$ است، بنابراین:

$$f(۰)=۱+a\sin(-\frac{\pi}{۶})>۱\Rightarrow۱-\frac{a}{۲}>۱\Rightarrow\frac{-a}{۲}>۰\Rightarrow a<۰$$

با توجه به شکل ماکزیمم تابع برابر ۱/۵ است، پس داریم:

$$۱+|a|=۱/۵\xrightarrow{a<۰}۱-a=۱/۵\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

هم‌چنین از روی شکل نتیجه می‌گیریم که دورهٔ تناوب تابع برابر π است. پس:

$$\frac{۲\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow|b|=۲\Rightarrow b=\pm۲$$

چون نمودار با شروع از مبدأ به صورت  است، پس باید a و b غیرهم‌علامت باشند، در نتیجه $b=۲$ قابل قبول است. بنابراین $a+b=\frac{-۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}$ می‌باشد.

۵۶ ۱ اگر دورهٔ تناوب تابع $f(۲x+۱)$ برابر ۴ باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر ۸ می‌شود؛ بنابراین دورهٔ تناوب تابع $y=۲f(-\frac{x}{۲})+۱$ برابر است با: $T=\frac{۸}{|-\frac{۱}{۲}|}=۱۶$

۵۷ ۳ بر طبق نمودار، دورهٔ تناوب $f(x)$ برابر $T=۴$ می‌باشد و می‌دانیم $f(x+nT)=f(x)$ $(n\in\mathbb{Z})$، یعنی برای محاسبهٔ مقدار تابع در یک نقطه می‌توان ۴ یا مضارب آن را به آن نقطه اضافه یا کم کرد. پس:

$$\begin{cases} f(۲۲)=f(۵\times۴+۲)=f(۲)=۲ \\ f(-۹)=f(-۳\times۴+۳)=f(۳)=\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(۲۲)+f(-۹)=۲+\frac{۳}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

۵۸ ۱ چون دورهٔ تناوب تابع برابر ۲ است، پس به عدد ۹/۹۶- می‌توان مضارب صحیح ۲ را اضافه یا کم کرد. (مضرب انتخابی باید طوری باشد که عدد حاصل بین ۲- و صفر قرار بگیرد)، بنابراین:

$$f(-۹/۹۶)=f(-۹/۹۶+(۴\times۲))=f(-۱/۹۶)=\sqrt{-۱/۹۶+۲}=\sqrt{۰/۰۴}=۰/۲$$

۵۹ ۳ از رابطهٔ $f(x-\frac{۱}{۲})=f(x+\frac{۳}{۲})$ نتیجه می‌گیریم تابع f متناوب است. برای این‌که دورهٔ تناوب را تعیین کنیم، داریم: $x-\frac{۱}{۲}=t\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}+t$

$$f(x-\frac{۱}{۲})=f(x+\frac{۳}{۲})\Rightarrow f(t)=f(\frac{۱}{۲}+t+\frac{۳}{۲})\Rightarrow f(t)=f(t+۲)\Rightarrow f(x)=f(x+۲)$$

می‌دانیم اگر f تابع تناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، رابطهٔ $f(x\pm nT)=f(x)$ برقرار است. پس از تساوی $f(x+۲)=f(x)$ نتیجه می‌گیریم عدد ۲ دورهٔ تناوب یا مضرب صحیحی از دورهٔ تناوب است. حال دورهٔ تناوب هر یک از گزینه‌ها را تعیین می‌کنیم. (با توجه به مطالب درسنامه دورهٔ تناوب $y=ax-[ax]$ برابر $T=\frac{۱}{|a|}$ است.)

$$۱)\ T=\frac{\pi}{|\frac{\pi}{۳}|}=۳ \qquad ۲)\ T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴ \qquad ۳)\ T=\frac{۱}{|\frac{۱}{۲}|}=۲ \qquad ۴)\ T=\frac{۱}{|\frac{۱}{۳}|}=۳$$

۶۰ ۱ از فرضیات سؤال نتیجه می‌گیریم $T=۱۲$ (دورهٔ تناوب)، $Max=۱۴$ و $min=۶$ می‌باشد. با توجه به گزینه‌ها، اگر تابع را به صورت $y=a\cos(bx)+c$ در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۱۲\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۶} \quad ; \quad \begin{cases} Max=|a|+c\Rightarrow۱۴=|a|+c \\ min=-|a|+c\Rightarrow۶=-|a|+c \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=۱۰ \\ |a|=۴ \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۶۱ ۲ با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $[۵,۱۱]$، سه‌بار تکرار شده است. پس اگر دورهٔ تناوب را T فرض کنیم، داریم:

$$۳T=(۱۱-۵)\Rightarrow۳T=۶\Rightarrow T=۲$$

بر اساس گزینه‌ها ضابطهٔ تابع به صورت $y=a\sin(bx)+c$ می‌باشد. برای تعیین a، b و c داریم:

$$\begin{cases} |a|+c=۹ \\ -|a|+c=۳ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c=۶ \\ |a|=۳ \end{cases} \quad , \quad T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۲\Rightarrow|b|=\pi$$

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

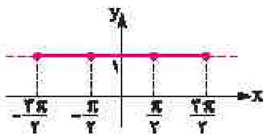
۶۲ ۲ با استفاده از رابطهٔ $\cos۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$، تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\cos(۲\tan x)+۲\sin^۲(\tan x)=(۱-\cancel{۲\sin^۲(\tan x)})+\cancel{۲\sin^۲(\tan x)}=۱$$

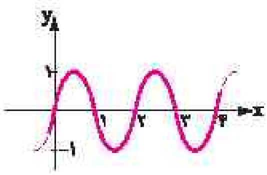
از طرفی می‌دانیم تابع $y=\tan x$ در نقاط به طول $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود، پس داریم:

$$f(x)=۱ \ ; \ D_f=\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{۲}|k\in\mathbb{Z}\}$$

با توجه به نمودار تابع، دورهٔ تناوب f برابر π می‌باشد. (فاصلهٔ دو حفره)



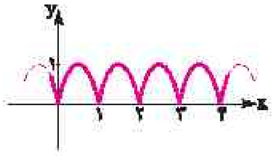
۶۳ ۱ ابتدا نمودار $y=\sin\pi x$ را رسم می‌کنیم:



از طرفی می‌دانیم عبارت $(-1)^{[x]}$ در بازه‌های متوالی به طول یک واحد برابر ۱ و ۱- می‌شود:

$$(-1)^{[x]}=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ 1 & 0\le x<1\\ -1 & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x<3\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو حاصل می‌شود که دورهٔ تناوب آن برابر ۱ است:

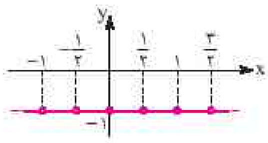


۶۴ ۲ با اتحاد مثلثاتی $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ عبارت را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\cos 2x+2\sin^2 x}{[2x]+[-2x]}=\frac{(1-2\sin^2 x)+2\sin^2 x}{[2x]+[-2x]}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{[2x]+[-2x]}$$

می‌دانیم $[2x]+[-2x]=\begin{cases}0 & 2x\in\mathbb{Z}\\ -1 & 2x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس تابع $f(x)=\frac{1}{[2x]+[-2x]}$ به ازای اعداد $x=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm\frac{3}{2},\dots$ $(2x\in\mathbb{Z})$ تعریف نمی‌شود و به ازای بقیهٔ اعداد برابر ۱- می‌شود. حال نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=-1\quad;\quad D_f=\mathbb{R}-\{\frac{k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}$$



با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب برابر $\frac{1}{2}$ است. (فاصلهٔ دو حفره برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.)

۶۵ ۴ درستی یا نادرستی رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ را به ازای کوچک‌ترین گزینه بررسی می‌کنیم، اگر برقرار بود دورهٔ تناوب است و چنان‌چه برقرار نبود به ترتیب به سراغ گزینه‌های بزرگ‌تر می‌رویم:

$$T=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(x+\frac{\pi}{4})=|\sin(2(x+\frac{\pi}{4}))|+|\cos(2(x+\frac{\pi}{4}))|=|\sin(\frac{\pi}{2}+2x)|+|\cos(\frac{\pi}{2}+2x)|$$

$=|\cos 2x|+|\sin 2x|=f(x)\Rightarrow$ دوره تناوب است $T=\frac{\pi}{4}$

۶۶ ۲ درستی یا نادرستی رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ را به ازای کوچک‌ترین گزینه بررسی می‌کنیم، اگر برقرار بود دورهٔ تناوب است و چنان‌چه برقرار نبود به ترتیب به سراغ گزینه‌های بزرگ‌تر می‌رویم:

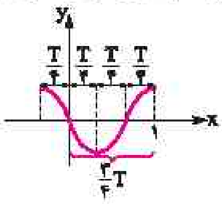
$$f(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2})\sin(3x+\frac{3\pi}{2})=-\cos x\cos 3x\neq f(x)$$

$$f(x+\frac{2\pi}{3})=\sin(x+\frac{2\pi}{3})\sin(3x+2\pi)\neq f(x)$$

$$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)\sin(3x+3\pi)=(-\sin x)(-\sin 3x)=f(x)$$

پس $T=\pi$ دوره تناوب است.

۶۷ ۲ می‌دانیم $y=\cos(\frac{\pi}{2}+\pi ax)=-\sin(\pi ax)$. حال اگر دورهٔ تناوب تابع $y=-\sin(\pi ax)$ را برابر T فرض کنیم، آن‌گاه بر طبق نمودار، داریم:



$$\frac{3}{4}T=1\Rightarrow T=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{2\pi}{|\pi a|}=\frac{4}{3}\Rightarrow|a|=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\pm\frac{3}{2}$$

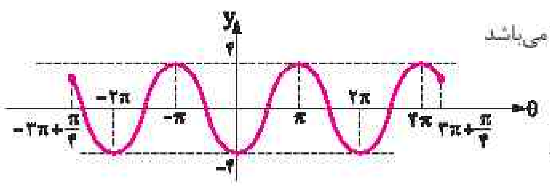
با توجه به نمودار $y=-\sin(\pi a x)$ درمی‌یابیم که $a>0$ است، پس $a=\frac{3}{2}$ صحیح است.

۶۸ ۳

$$-1\le x\le 1\Rightarrow -3\pi\le -3\pi x\le 3\pi\Rightarrow -3\pi+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}-3\pi x\le 3\pi+\frac{\pi}{4}$$

اگر $\theta=\frac{\pi}{4}-3\pi x$ را فرض کنیم، با رسم $y=-4\cos\theta$ که $-3\pi+\frac{\pi}{4}\le\theta\le 3\pi+\frac{\pi}{4}$ می‌باشد

می‌توانیم نقاطی که بیشترین مقدار را دارند به دست آوریم:



پس نمودار تابع در سه نقطه به طول‌های $\{-\pi,\pi,3\pi\}$ دارای بیشترین مقدار می‌باشد.

۶۹ ۱ هریک از گزینه‌ها را با تعریف $f(x+T)=f(x)$ بررسی می‌کنیم. برای این کار از عدد کوچک‌تر شروع می‌کنیم:

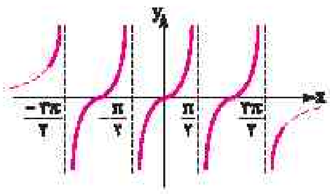
$$T\overset{?}{=}\frac{1}{2}\Rightarrow f(x+T)=f(x+\frac{1}{2})=\cos(\cos(\pi x+\frac{\pi}{2}))=\cos(-\sin\pi x)=\cos(\sin\pi x)\neq f(x)$$

$$T\overset{?}{=}1\Rightarrow f(x+T)=f(x+1)=\cos(\cos(\pi x+\pi))=\cos(-\cos\pi x)=\cos(\cos\pi x)=f(x)$$

بنابراین $f(x)$ با دورهٔ تناوب $T=1$، متناوب است.

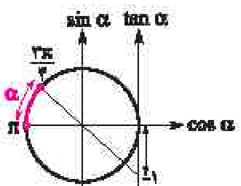
دقت کنید اگر گزینهٔ دوم را نیز امتحان کنید خواهیم داشت: $f(x+2)=f(x)$، اما با توجه به تعریف تابع متناوب، دورهٔ تناوب، کوچک‌ترین فاصله‌ای است که تابع در آن تکرار می‌شود. بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۷۰ ۱ نمودار تابع $f(x)=\tan x$ به صورت مقابل است:



از روی نمودار ملاحظه می‌شود که تابع در دامنه‌اش صعودی نیست بنابراین گزینهٔ (۱) نادرست است.

۷۱ ۱ ابتدا محدودهٔ زاویهٔ α را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم و سپس محدودهٔ $\tan\alpha$ را به دست می‌آوریم:



$$\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi\Rightarrow -1<\tan\alpha<0\Rightarrow -1<\frac{2}{m-1}<0\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{m-1}<0\Rightarrow m-1<0\Rightarrow m<1\\ \frac{2}{m-1}>-1\Rightarrow\frac{1+m}{m-1}>0\Rightarrow m>1 \text{ یا } m<-1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} m<-1$$

۷۲ ۱ روش اول: ابتدا با توجه به روابط $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$، تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

حال به کمک نمودار تابع $y=\tan x$، نمودار $y=\tan\frac{x}{2}$ را رسم می‌کنیم:

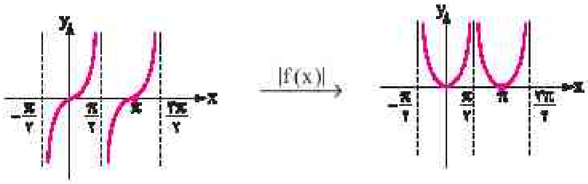
$y=\tan x$ $\quad$ $y=\tan\frac{x}{2}$

روش دوم (عددگذاری): با توجه به ضابطهٔ تابع $y(\frac{\pi}{2})=1$ است که فقط گزینهٔ (۱) این شرط را دارد. (در بازهٔ داده‌شده غیر از $x=\pi$ مجانب قائم دیگری ندارد.)

۷۳ ۲ روش اول: تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos2x}{1+\cos2x}}=\sqrt{\frac{2\sin^2x}{2\cos^2x}}=\sqrt{\tan^2x}=|\tan x|$$

حال با توجه به نمودار $y=\tan x$، نمودار $y=|\tan x|$ را رسم می‌کنیم:



$y=\tan x$ $\quad$ $y=|\tan x|$